

Számítógéppel irányított rendszerek elmélete

2. évközi zárthelyi dolgozat

2011. 05. 12.

elméleti kérdések

1 Elmélet - 15p

1. Hogyan állapítható meg egy $W(s)$ átviteli függvénnyel adott lineáris rendszer erősítése egy adott ω körfrekvenciájú harmonikus jel ($u = \sin(\omega t)$) esetén? (2p)

MO: $s = j\omega$ helyettesítés az átviteli függvényben $\rightsquigarrow$ az erősítés a kiadódó komplex szám amplitudójával egyezik meg.

2. Mi a minimumfázisú rendszer definíciója, és mi ezen rendszerek jelentősége? (2p)

MO: Olyan rendszer, melynek minden zérusa stabil. Jelentőség: Ezen rendszerek ele-
gendően nagy erősítésű negatív kimeneti visszacsatolással mindig stabilizálhatóak.

3. Mi vágási körfrekvencia definíciója? (2p)

MO: Az a frekvencia, melyen a Nyquist diagramm a belép a komplex síkon az egységkörbe.

4. Milyen rendszertulajdonság teljesülése esetén tervezhető teljes állapotvisszacsatolást használó pólusáthelyezéssel szabályzó, és hol jelenik meg ez a tervezési eljárásban? (3p)

MO: A rendszernek irányíthatónak kell lennie (1p). Az Ackermann formulában meg-
jelenik az irányíthatósági mátrix inverze, mely csak irányítható rendszer esetén létezik:
 $K = (0 \dots 0 \ 1) \mathcal{C}^{-1} \varphi_c(A)$ (2p).

5. Milyen tulajdonságoknak kell teljesülnie az LQ irányítás problémafelvetésében szereplő funkcionál ($J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$) Q és R mátrixaira? (2p)

MO: $Q^T = Q$, $Q > 0$ és $R^T = R$, $R > 0$

6. Igaz-e hogy (indoklás)?

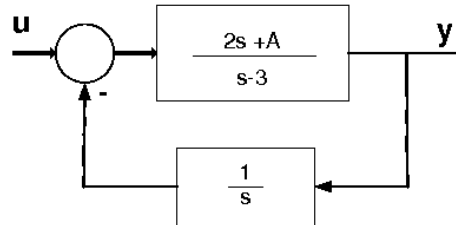
- Statikus lineáris kimeneti visszacsatolás nem befolyásolja lineáris rendszer pólusainak helyét. (2p)
- Diszkrét idejű rendszerek esetén a stabilitás feltétele, hogy a rendszer pólusai a komplex sík bal oldalára essenek ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$). (2p)

MO:

- Nem igaz, a pólusokat a kimeneti visszacsatolás is áthelyezi, csak nem lehet ilyen módon a rendszer pólusait *tetszőleges* helyre áthelyezni.
- Nem igaz, az egységkör belsejébe kell esniük.

2 Gyakorlat - 15p

1. Legyen



Stabil lesz-e a visszacsatolt rendszer $A=0$ illetve $A=0.25$ értékek esetén (3p)?

MO:

$$W(s) = \frac{\frac{2s+A}{s-3}}{1 + \frac{2s+A}{s-3} \frac{1}{s}} = \frac{2s^2 + As}{s^2 - 3s + 2s + A} = \frac{2s^2 + As}{s^2 - s + A}$$

amiből a nevező gyökei: $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4A}}{2}$ - tehát egyik esetben sem (vagy $\lambda_{1,2} = 0, 1$ vagy $\lambda_{1,2} = 0.5$) illetve

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1) \quad D = 0$$

- Tervezzon állapotvisszacsatolást a rendszerhez, ami a rendszer pólusait $[-2, -1]$ helyekre mozgatja el (3p)!
- Ellenőrizze a megoldást (1p)!
- Tervezzon állapotmegfigyelőt a rendszerhez, aminek előírt karakterisztikus egyenlete: $\varphi_o(s) = (s+1)(s+1)$ Írja fel az állapotmegfigyelő állapotegyenletének $(\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy + Hu)$ F, G és H mátrixait (3p)!

MO:

- $K = [0 \quad 1]C^{-1}\varphi_c(A)$
ahol

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(A) = A^2 + 3A + 2I = \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow K = [9 \quad 6]$$

- $\lambda(A - BK) = -2, -1$
- A fiktív rendszer mátrixai:

$$A_2 = A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G^T = K_2 = [0 \quad 1]C_2^{-1}\varphi_c(A_2)$$

ahol

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow C_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi_o(A_2) = A_2^2 + 2A_2 + I = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow G = K_2^T = [5 \quad 5]^T, \quad F = A - GC = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad H = B$$

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy + Hu$$

3. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (0 \quad 1)$$

Határozza meg a Φ mátrixot, ha a rendszert $T=\ln(3)$ mintavételi idővel diszkrétizáljuk (3p)! $(x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k))$

MO:

$$\begin{aligned} (SI - A) &= \begin{pmatrix} s+3 & 0 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (SI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+1)} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{2}{(s+3)(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ \Phi = e^{At}|_{t=\ln(3)} &= \begin{pmatrix} 1/27 & 0 \\ 1/3 - 1/27 & 1/27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/27 & 0 \\ 8/27 & 1/27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. $\dot{x} = -0.5x + 2u$ határozza meg azt az u bemenetet állapotviszacsatolás formájában ami minimalizálja a

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \quad dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty Q x^2 + R u^2 \quad dt$$

funkcionált, ahol $Q=3$, $R=1$ (2p)!

MO: A Ricatti-egyenlet:

$$SA + A^T S - SBR^{-1}BS + Q = -S - 4S^2 + 3 = 0$$

melynek a gyökei: $[-1, 3/4]$, melyek közül a pozitív adja a megoldást $K = R^{-1}B^T S = 3/4$ (tehát $u = -3/4x$)